

Αριθμοί και Πυθαγόρεια Φιλοσοφία

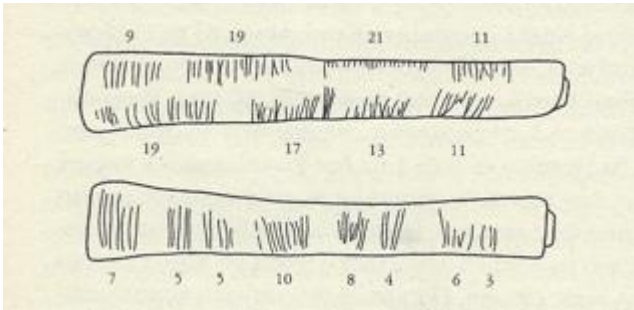
ΜΕΡΟΣ Γ΄

«Παραστατικοί αριθμοί»

Στον αρχαίο κόσμο, η ικανότητα της χρήσης των Μαθηματικών για την πρόβλεψη ουράνιων φαινομένων καθώς και των τεσσάρων εποχών αποτελούσε ένα κρίσιμο είδος πληροφορίας για κάθε βασιλιά ή αυτοκράτορα. Οι γεωργοί έπρεπε να πληροφορούνται από τον βασιλιά τους για την εποχή της σποράς. Οι πλημμύρες των ποταμών και οι εκλείψεις του ηλίου και της σελήνης έπρεπε να προβλέπονται.

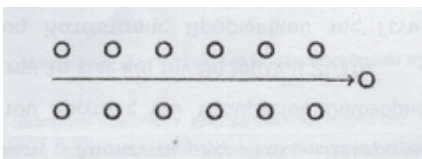


Οι αρχαίοι Έλληνες στοχαστές, στην πραγματικότητα θεωρούσαν τις «τέσσερις αριθμητικές πράξεις» (τις οποίες ονόμαζαν λογιστική), ως υποδεέστερες από τη μελέτη της «θεωρίας των αριθμών» (την οποία ονόμαζαν αριθμητική).



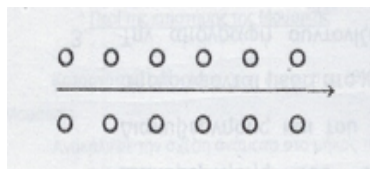
Χρειάστηκαν πολλοί αιώνες ή και χιλιετίες για να φτάσουμε στον σημερινό αυτονόητο για μας κόσμο περιγραφής και συμβολισμού των αριθμών και των σχέσεων τους. Οι πρώτες ενδείξεις στοιχειώδους αρίθμησης έχουν ανακαλυφθεί περίπου γύρω στο 35000 π.Χ και είναι απλώς γραμμές χαραγμένες σε οστά.

Οι Πυθαγόρειοι είχαν αναπτύξει έναν ιδιότυπο τρόπο συμβολισμού των αριθμών με μικρούς λίθους τοποθετημένους κατάλληλα σε κάποια επίπεδη επιφάνεια.



Με αυτό τον τρόπο ταξινομούσαν τους αριθμούς σε «περιττούς» και «άρτιους» χρησιμοποιώντας για μεν τους περιττούς το διπλανό σχήμα

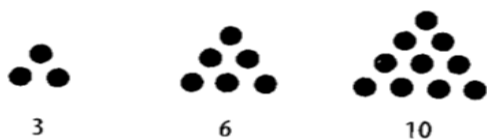
και για μεν τους άρτιους το σχήμα



(βλέπε Β΄ μέρος της εργασίας).

Επίσης είχαν αναπτύξει ένα «**παραστατικό**» τρόπο απεικόνισης των αριθμών με τη μορφή γεωμετρικών σχημάτων.

❖ Τρίγωνοι αριθμοί.

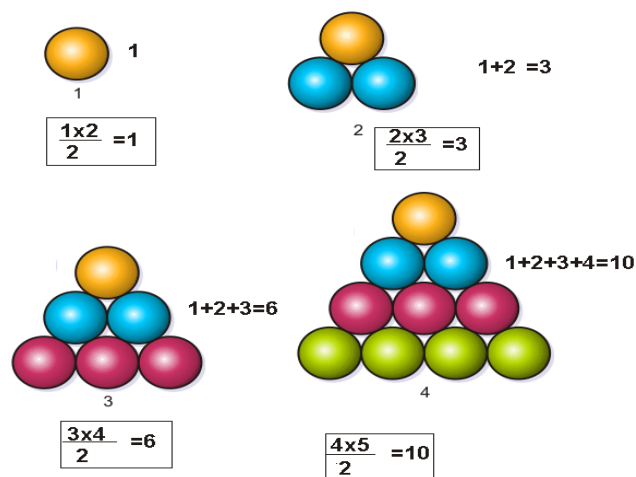


ΕΙΚΟΝΑ 4. Διατάξεις από βότσαλα για τους αριθμούς 3, 6 και 10

Πιθανότατα, ο Πυθαγόρας ανακάλυψε ότι το άθροισμα οποιουδήποτε πλήθους διαδοχικών όρων της ακολουθίας των φυσικών αριθμών 1, 2, 3 ... αρχίζοντας από τον 1, δίνει έναν τρίγωνο αριθμό.

$$1, \quad 1+2=3, \quad 1+2+3=6, \quad 1+2+3+4=10$$

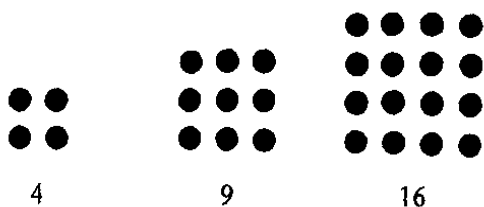
άρα ο επόμενος τρίγωνος αριθμός είναι: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$



Παρατηρώντας την διπλανή εικόνα διαπιστώνουμε ότι για κάθε τρίγωνο αριθμό με πλευρά n

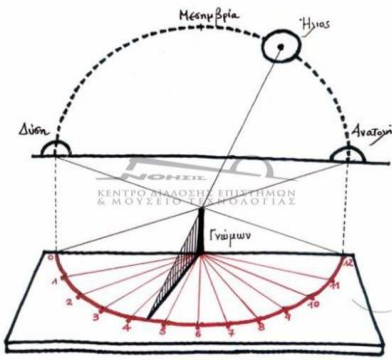
Ισχύει γενικά: $1+2+3+4+\dots+n = n(n+1)/2$

❖ Τετράγωνοι αριθμοί.



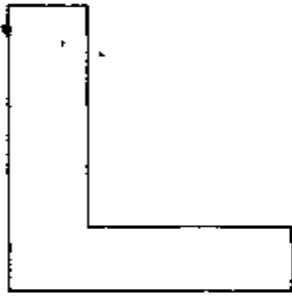
ΕΙΚΟΝΑ 5. Διατάξεις από βότσαλα για τους τετραγωνικούς αριθμούς 4, 9 και 16.

Κάποιοι αριθμοί, που απεικονίζονται με βότσαλα, μπορούν να σχηματίσουν τετράγωνα. Αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται **τετραγωνικοί**. Στη διπλανή εικόνα φαίνεται η απεικόνιση των τετράγωνων αριθμών 4, 9, 16 που είναι τα τετράγωνα του 2,3,4 αντίστοιχα.

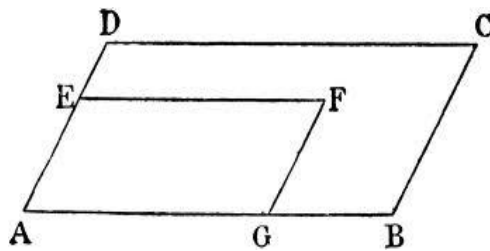
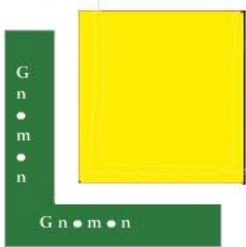


Για να μελετήσουμε καλύτερα το πώς σχηματίζονται οι τετράγωνοι αριθμοί από βότσαλα θα πρέπει να μάθουμε την ιστορία του όρου «**γνώμων**» .

Αρχικά ο «**γνώμων**» ήταν ένα αστρονομικό όργανο για τη μέτρηση του χρόνου, που αποτελούταν από μια κατακόρυφη ράβδο, που έριχνε σκιά σε ένα επίπεδο ή σε μια ημισφαιρική επιφάνεια.



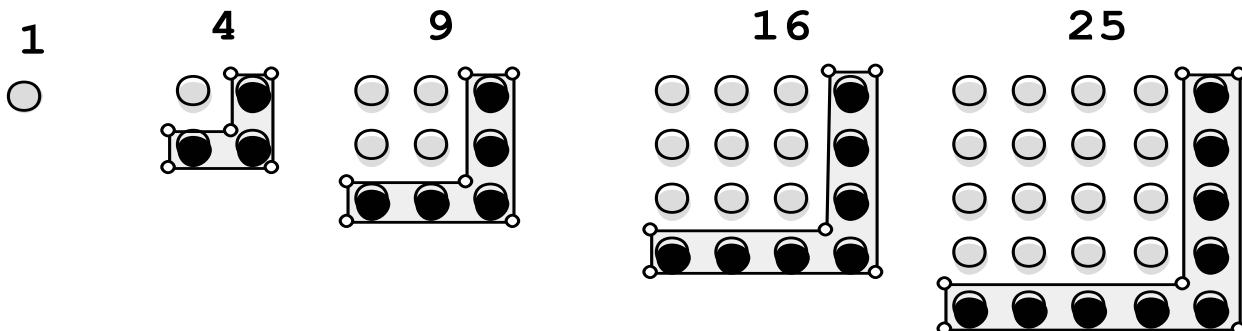
Στη συνέχεια, συναντάμε τον όρο να χρησιμοποιείται για την περιγραφή ενός οργάνου σχεδίασης ορθών γωνιών, όπως αυτό στο διπλανό σχήμα.



Ένας γνώμονας έχει την δυνατότητα όταν προστίθεται ή αφαιρείται σε ένα τετράγωνο ή ορθογώνιο να δίνει πάλι ένα όμοιο σχήμα δηλαδή τετράγωνο ή ορθογώνιο αντίστοιχα.

Ερχόμαστε τώρα ξανά στους τετράγωνους αριθμούς.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, αν έχουμε έναν αριθμό από βότσαλα, τα οποία σχηματίζουν ένα τετράγωνο όπως στην παρακάτω εικόνα π.χ. αυτό που παριστάνει το 16, δηλαδή το τετράγωνο του 4, τότε το τετράγωνο που παριστάνει το 25, μπορεί να σχηματισθεί με την προσθήκη ενός **γνώμονα με ίσα σκέλη** που αποτελείται από 4 βότσαλα σε κάθε πλευρά του και 1 βότσαλο στην κορυφή (δηλαδή 9 βότσαλα). Έτσι θα προκύψει το τετράγωνο του 5.



Μελετώντας τα σχήματα στην ίδια εικόνα παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

$$1^2 = 1$$

$$2^2 = 4 = 1 + 3 = 1 + (2 \cdot 1 + 1) \text{ (το τετράγωνο του 2)}$$

$$3^2 = 9 = 1 + 3 + 5 = 1 + 3 + (2 \cdot 2 + 1) \text{ (το τετράγωνο του 3)}$$

$$4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7 = 1 + 3 + 5 + (2 \cdot 3 + 1) \text{ (το τετράγωνο του 4)}$$

$$5^2 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 1 + 3 + 5 + 7 + (2 \cdot 4 + 1) \text{ (το τετράγωνο του 5)}$$

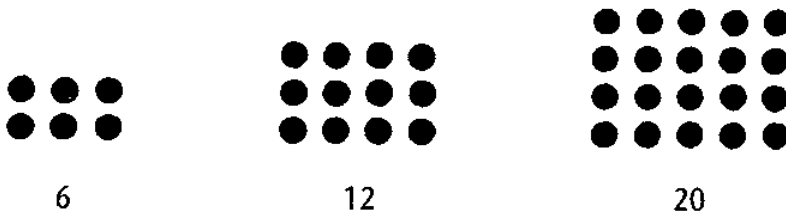
Άρα το τετράγωνο που παριστάνει τον αριθμό **36** είναι:

$$36 = 6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + (2 \cdot 5 + 1) \text{ δηλαδή προκύπτει από το προηγούμενο τετράγωνο (5^2) αν του προσθέσουμε τον επόμενο περιττό αριθμό (2 \cdot 5 + 1)}$$

Γενικά : $(v+1)^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2 \cdot v + 1)$

Επομένως το άθροισμα διαδοχικών περιττών αριθμών με μορφή γνώμονα δημιουργεί συνεχώς το ίδιο σχήμα δηλαδή τετράγωνο και δίνει σαν άθροισμα πάντα ένα τετράγωνο αριθμό. Αυτός είναι και ένας λόγος που οι Πυθαγόρειοι ταυτίζουν τους περιττούς αριθμούς με το «περιορισμένο»

❖ Ορθογώνιοι αριθμοί ή Ετερομήκεις.



Οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν ότι, εάν προσθέσουμε διαδοχικούς άρτιους αριθμούς αρχίζοντας με το 2, παίρνουμε αριθμούς που μπορούν να απεικονιστούν με βότσαλα ή χαλίκια σε ορθογώνια μορφή, όπου οι αριθμοί των σειρών και των στηλών διαφέρουν κατά 1. Αυτοί οι αριθμοί ονομάζονται ορθογώνιοι ή ετερομήκεις.

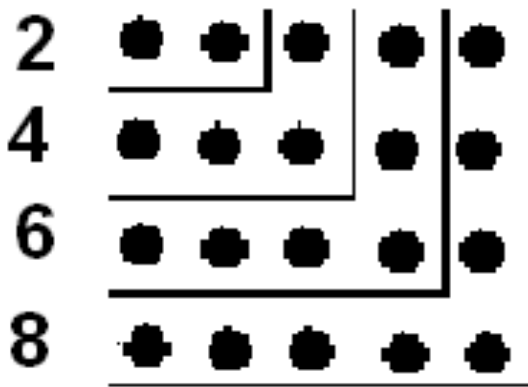
$$6 = 2 + 4 \text{ αλλά και } 6 = 2 \cdot 3$$

$$12 = 2 + 4 + 6 \text{ αλλά και } 12 = 3 \cdot 4$$

$$20 = 2 + 4 + 6 + 8 \text{ αλλά και } 20 = 4 \cdot 5$$

γενικά

$$2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2v = v(v+1)$$

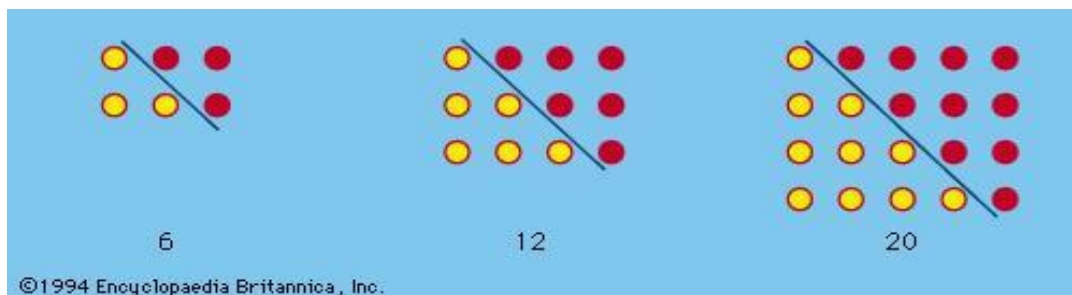


Η προσθήκη διαδοχικών άρτιων αριθμών στον άρτιο 2 με γνώμονες που δεν έχουν ίσα σκέλη μας δίνουν συνεχώς ορθογώνιους μεν αριθμούς, όμως με συνεχώς διαφορετικές γεωμετρικές μορφές που είναι ανόμοια ορθογώνια αφού ο λόγος των μηκών των πλευρών τους δεν είναι ίδιος. Γι' αυτό κατά τους Πυθαγόρειους «**το άρτιο συνδέεται με το απεριόριστο (άπειρο)**»

Επίσης οι Πυθαγόρειοι διαπίστωσαν ότι:

κάθε ορθογώνιος αριθμός που οι «πλευρές του» διαφέρουν κατά 1 είναι διπλάσιος ενός τριγωνικού αριθμού.

Βλέπουμε μια οπτική αναπαράσταση στο παρακάτω σχήμα..



όπου ισχύει

$$3 + 3 = 6$$

$$6 + 6 = 12$$

$$10 + 10 = 20$$

Οι μαθητές:

Καργιανιώτης Λεωνίδα Β'2

Λέντζιος Στάθης Β'2

Πηγές:

- Μαθηματικά Μυστήρια, Clawson C. Calvin
- Ιστορία Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών 1^{ος} τόμος, Νεγρεπόντης Στυλιανός, Φαρμάκη Βασιλική
- Η θεωρητική Αριθμητική των Πυθαγορείων, Taylor Thomas
- Πρόγραμμα Μαθηματικών 4^{ου} Γυμν. Αιγάλεω 2012-13 με τίτλο «Οι Αριθμοί σαν στοιχείο Πολιτισμού στην Αρχαιότητα»
Υπεύθυνος προγράμματος: Βανταράκης Νικόλαος