Γενικές οδηγίες και συμβουλές για τις Πανελλαδικές 2022 !

♥ ♥ ♥

Μπάμπης Στεργίου - Μαθηματικός

Φίλε μαθητή/φίλη μαθήτρια !

Διάβασε καλά αυτές τις οδηγίες δυο και τρεις φορές, αν έχεις το χρόνο ! Αποτελούν στην ουσία τις δικές σου σκέψεις και την εμπειρία των προηγούμενων υποψήφιων. Ο καθηγητής σου θα σχολιάσει υπεύθυνα μαζί σου τις πιο πολλές από αυτές τις οδηγίες. Αν συγκρατήσεις ένα μέρος τους , θα έχεις κάνει ένα μεγάλο βήμα για την επιτυχία σου!

1. Ποτέ δεν βιαζόμαστε να ξεκινήσουμε την λύση ενός ερωτήματος, αν δεν βεβαιωθούμε ότι έχουμε καταλάβει απόλυτα τόσο τα δεδομένα όσο και τα ζητούμενα. Ακόμα και τα σημεία στίξης έχουν τη σημασία τους πολλές φορές, ειδικά στα προβλήματα. Για αυτό διαβάζουμε αργά και σχολαστικά την άσκηση, τουλάχιστον δύο φορές. Μερικές φορές είναι χρήσιμο να ρίξουμε μια ματιά σε όλο το θέμα, γιατί από τα επόμενα ερωτήματα γίνονται καλύτερα αντιληπτά τα προηγούμενα. **Συνήθως η λύση βρίσκεται στην εκφώνηση !**

2. Πριν αρχίσουμε να γράφουμε σκεφτόμαστε ψύχραιμα και φέρνουμε στο μυαλό μας αντίστοιχες ασκήσεις :

- Μήπως πρέπει να αναφέρω κάποιες προϋποθέσεις ; Κρίμα να χάσω μονάδες από έλλειψη αιτιολογήσεων .
- Έγραψα το πεδίο ορισμού ; Έβαλα διπλή γραμμή στα πινακάκια που ίσως φτιάξω για μονοτονία ή για πρόσημο, όπου δεν ορίζεται η συνάρτηση ;
- Εξέτασα δεύτερη φορά τα πρόσημα σε κάποιον πίνακα που αφορά στην f ή στην f' ;
- Μήπως μπορώ να φτιάξω **ένα διάγραμμα** , ώστε και την εκφώνηση να καταλάβω καλύτερα, αλλά και την πορεία λύσης να αντιληφθώ γρηγορότερα ; Αυτό ενδείκνυται σε προβλήματα με εφαπτομένες, στο ρυθμό μεταβολής , σε ανισότητες πάνω σε κυρτές ή κοίλες συναρτήσεις αλλά και σε κάθε περίπτωση με γραφικές παραστάσεις , όπως πχ στις αντίστροφες.

3. Κάνουμε με πάρα πολύ προσοχή , χωρίς όμως πίεση και αγωνία, τις πράξεις. Σε κάθε βήμα *ελέγχουμε* τις απαντήσεις και μετά προχωράμε. Κοιτάζουμε για αντίθετους όρους, για κοινούς παράγοντες, για απλοποιήσεις κλπ, βάζοντας πάντα και παντού τυχόν περιορισμούς. Όταν λύνουμε εξισώσεις ή καταλήγουμε σε αριθμητικές απαντήσεις, κάνουμε όπου είναι δυνατόν μια σύντομη επαλήθευση. Οι πιο πολλοί μαθητές χάνουν τουλάχιστον 1-3 μονάδες από επιπόλαια αριθμητικά λάθη.

Η απώλεια μονάδων από λάθος πράξεις είναι ό,τι χειρότερο μπορεί να σου συμβεί στις εξετάσεις ! Πρέπει με κάθε τρόπο οι πράξεις μας να είναι σωστές !

4. Αν ένα ερώτημα δεν μπορέσεις να το απαντήσεις, πάρε το συμπέρασμα έτοιμο, ως να το είχες αποδείξει, και χρησιμοποίησέ το έτοιμο για να λύσεις όχι μόνο το αμέσως επόμενο αλλά και τα επόμενα. Μπορεί μάλιστα το ερώτημα αυτό να είναι απαραίτητο για το τελευταίο υποερώτημα !

5. Αν δεις ότι στη λύση μιας άσκησης οδηγείσαι σε υπερβολικά πολλές πράξεις, εξισώσεις μεγάλου βαθμού ή πολύ σύνθετες και μακροσκελείς σχέσεις, τότε ένα είναι σίγουρο : ή έχεις κάνει κάποιο αριθμητικό λάθος ή προσπέρασες κάποια απλοποίηση ή βασικό αλγεβρικό τέχνασμα ή πήρες τελείως λανθασμένο τρόπο. Πάρε την ερώτηση από την αρχή, διάβασέ την καλά, βεβαιώσου εκ νέου ότι κατάλαβες τι σου ζητάνε και ξεκίνα από άλλο μονοπάτι αν μπορείς. Πάντα να σκέφτεσαι που πρέπει να φτάσεις.

6. Όπου μπορούμε , χαράσσουμε ένα πρόχειρο διάγραμμα ή έναν βοηθητικό πίνακα για να καταλάβουμε την ερώτηση ή να αξιοποιήσουμε τα δεδομένα(ειδικά αν μας δίνεται θέμα με διάγραμμα της παραγώγου). Χωρίς αυτό, μερικές φορές είναι αδύνατο να μπούμε στο σκεπτικό της άσκησης.

7. Σε κάθε μας λύση κάνουμε τουλάχιστον μια αναφορά στις προϋποθέσεις των προτάσεων που χρησιμοποιούμε. Αν οι αναφορές αυτές δεν είναι προφανείς, θέλουν λεπτομερή αιτιολόγηση, όπως πχ στο θεώρημα Bolzano η συνθήκη $f(\alpha)f(\beta)<0$. Αντίθετα, είναι αρκετό να γράψουμε ότι : η συνάρτηση f είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών), είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο …κλπ

8. Το λάθος, λογικό ή αριθμητικό, συνήθως γίνεται πιο συχνά σε ασκήσεις που ξέρουμε τη λύση τους παρά σε άλλες, τελείως άγνωστες. Για αυτό εκεί που βλέπουμε ότι ξέρουμε τον τρόπο, πρέπει να είμαστε δυο φορές συγκεντρωμένοι και να προχωράμε μεθοδικά και νηφάλια. Δεν βιαζόμαστε. Χρόνος υπάρχει αρκετός. Όμως αυτός ο χρόνος ροκανίζεται από τυχόν λάθη και ανόητες όπως τις λέμε αστοχίες : (α) άλλα ζητάει το πρόβλημα και άλλα ψάχνουμε εμείς (β) Άλλα δεδομένα έδωσε και άλλα νομίζουμε εμείς κλπ.

9. Μη βιάζεσαι ποτέ να πας να κάνεις τεχνάσματα που έμαθες στη λύση κάποιων ασκήσεων.

<< **Ποτέ μην προσπερνάς το προφανές !!!** >> ,

έλεγα παλιά σε έναν μαθητή μου και όταν τον συναντώ μετά από δέκα χρόνια, αντί για καλημέρα μου λέει αυτή τη φράση. Τόσο πολύ του άρεσε ! Αυτή εδώ είναι ίσως η πιο σημαντική φιλική συμβουλή που σου δίνω .Να ξεκινάς και να σκέφτεσαι όσο πιο απλά και σταθερά μπορείς. Βήμα – βήμα. Κάνε πρώτα αυτά που λένε ο ορισμός και τα θεωρήματα (πχ στο 1-1 ή στην μονοτονία ή στο θεώρημα Rolle).Προσπάθησε πχ να λύσεις την εξίσωση $f'(x)=0$ με αλγεβρικό τρόπο. Ψάξε μήπως έχει κάποια προφανή ρίζα. Αν δεν λύνεται η εξίσωση αλγεβρικά, έχεις όμως βρει ρίζα με παρατήρηση , τότε ή προχώρα στην 2^{η} παράγωγο για να φτιάξεις το γνωστό καθοδικό πίνακα ή πάρε τον αριθμητή της παραγώγου ως βοηθητική συνάρτηση και βρες το πρόσημό της. Έχεις κάνει πολλά τέτοια παραδείγματα και θα βρεις εύκολα τη σωστή λύση. Προσοχή : αν πάρεις ως βοηθητική συνάρτηση το 1^o μέλος της εξίσωσης $f'(x)=0$, τότε η μελέτη της θα σου λύσει μεν την εξίσωση, αλλά το πρόσημό της δεν είναι πάντα ίδιο με το πρόσημο της παραγώγου. Για την παράγωγο, αφού ξέρεις πια τις ρίζες, θα κάνεις άλλον πίνακα των f',f για να βάλεις πρόσημο και να βρεις τη μονοτονία της f.

10. Σε ερωτήσεις : << Να αποδείξετε ότι υπάρχει …>> ή << να αποδείξετε ότι η εξίσωση …έχει μία τουλάχιστον(ή ακριβώς μία) ρίζα σε ένα διάστημα >> φέρνουμε αμέσως στο μυαλό μας τα υπαρξιακά θεωρήματα : Bolzano, Rolle, ΘΕΤ, ΘΜΤ, ΘΜΕΤ.

Πρώτη σου σκέψη είναι να κάνεις έναν γρήγορο έλεγχο μήπως μια ρίζα βρίσκεται και μετά να αποδείξεις τη μοναδικότητα, αν ζητείται.

Λοιπόν, σε τέτοια ερωτήματα, μπορεί να πρέπει να θεωρήσουμε βοηθητική συνάρτηση. Όχι μόνο βάζουμε x στη θέση του γράμματος x_0,του οποίου θέλουμε την ύπαρξη , όχι μόνο τα φέρνουμε όλα στο 1^o μέλος, αλλά μερικές φορές διώχνουμε τους παρανομαστές που μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος που μας δίνουν. Έχετε κάνει δεκάδες τέτοιες ασκήσεις και με λίγη προσοχή θα τα καταφέρετε.

Το νου μας στο ΘΜΤ. Αν κάπου δούμε μέσα στο ζητούμενο δύο τιμές τις συνάρτησης , πχ $f(x+2)$ και $f(x-1)$, τότε αυτό …φωνάζει για ΘΜΤ στο διάστημα $[x-1,x+2]$(Να κάνετε το αντίστοιχο ερώτημα στο ΘΕΜΑ 4 – 2019)

Αν δεν δίνεται διάστημα, τότε η ύπαρξη συνήθως προκύπτει από το σύνολο τιμών.Βρίσκουμε λοιπόν το σύνολο και από εκεί γίνεται άμεση η ύπαρξη. Μένει ίσως η μοναδικότητα, αλλά αυτή γίνεται κατακόρον με την μονοτονία ή το 1-1.

11. Όταν λύνουμε εξισώσεις ή ανισώσεις, βάζουμε από την αρχή τους απαραίτητους περιορισμούς και στο τέλος **επαληθεύουμε** (ή συναληθεύουμε) τις λύσεις μας.

12. Όλες τις προτάσεις που θα χρησιμοποιήσεις στη λύση μιας άσκησης, να θυμάσαι ότι τις έχεις ήδη χρησιμοποιήσει δεκάδες φορές. Μην …. ανακαλύψεις δικό σου θεώρημα, όσο προφανές και να φαίνεται. Στηρίξου στα γνωστά. **Ναι στη φαντασία, όχι στην αυθαιρεσία** !!!

13. Να κοιτάς συνεχώς τα συμπεράσματα από τα προηγούμενα ερωτήματα, όλα όμως τα προηγούμενα ερωτήματα. Μπορεί πχ το Γ4 να βασίζεται στο Γ1 και το Γ1 θα έχει ξεχαστεί όσο εσύ μελετάς τα ενδιάμεσα ερωτήματα.

14. Αν το συμπέρασμα κάποιου ερωτήματος το αποδείξεις σε άλλο ερώτημα, να το αναφέρεις. Μπορεί πχ να μην λύσεις το Δ1, αλλά μέσα στο Δ3 να το λύσεις ακολουθώντας άλλη πορεία. Μπορείς στο γραπτό σου αυτό να το αναφέρεις βάζοντας έναν αστερίσκο.

15. Δεν εγκαταλείπουμε κανένα απολύτως ερώτημα. Ακόμα και εκεί που όλα δείχνουν σκοτεινά, κάνε στον εαυτό σου την ερώτηση : << Τι μπορώ να γράψω για να πάρω μια μονάδα ; >>. Θα διαπιστώσεις ότι ερμηνεύοντας τα δεδομένα και τα ζητούμενα μπορείς να φτάσεις να πάρεις ακόμα και τις μισές μονάδες, χωρίς να έχεις λύσει το δύσκολο σημείο της άσκησης. Είναι προφανές ότι στο καθαρό αφήνουμε όλη μας την προσπάθεια. Μην βάζεις Χ(διαγραφή) σε αυτά που έχεις γράψει, αν δεν βρεις κάτι καλύτερο. Μπορεί σε αυτά που έχεις γράψει να έχεις κάνει μεγάλο βήμα για τη λύση της άσκησης και να μην το έχεις καταλάβει. Ο βαθμολογητής όμως θα το δει και θα σε ανταμείψει !

16. Αν δεις ΘΕΜΑ με διάγραμμα ή πρόβλημα(ακροτάτων ή ρυθμού μεταβολής) κάνε ακριβώς ό,τι έχεις μάθει στο μάθημα. Μη βιάζεσαι. Διάβασε πολλές φορές την εκφώνηση. Φτιάξε καλό σχήμα, αν δεις ότι βοηθάει. Βάλε σωστές μεταβλητές(αν και θα τις λέει ίσως το πρόβλημα). Αυτά τα θέματα, αν δεν τα φοβηθείς και έχεις λύσει πέντε από το καθένα, δεν τα χάνεις σχεδόν ποτέ ! Πάρε το σχολικό βιβλίο σου με το βοήθημα και λύσε μόνος σου αυτά που έχεις κάνει στο μάθημα. Δες και τα ερωτήματα από παλιότερες εξετάσεις. Το μόνο δύσκολο για όλα αυτά είναι να βρεις 3 δίωρα για μελέτη . Μπορείς όμως να τα βρεις και σίγουρα αξίζει τον κόπο !

Γενικές παρατηρήσεις

1. Μοίρασε σωστά το χρόνο σου ! Αφιέρωσε για κάθε ερώτημα τουλάχιστον 5 λεπτά, όσο δύσκολο ή απροσπέλαστο και να σου φαίνεται. Προσπάθησε και από αυτό να πάρεις μία τουλάχιστον μονάδα. Αν διαπιστώσεις ότι το ερώτημα δεν προχωράει άλλο και περάσουν 15 λεπτά, προχώρα στο επόμενο και γυρίζεις σε αυτό στο τέλος, αφού πρώτα προσπαθήσεις όλα τα άλλα ερωτήματα.

2. Ελέγχουμε αν έχουμε περάσει όλες μας τις λύσεις στο καθαρό. Α! Να τονίσουμε ξανά ότι γράφουμε απευθείας στο καθαρό και στο τέλος του τετραδίου (είναι το πρόχειρο) κάνουμε ίσως κάποιον έλεγχο για δεύτερη φορά τις πράξεις κλπ. Τις χρήσιμες πράξεις να τις κάνεις στο καθαρό.

3. Αν νομίζεις ότι στο πρόχειρο έχεις αφήσει σωστές προσπάθειες που δεν προλαβαίνεις να τις περάσεις μπροστά, γράψε πάνω σε αυτές τις προσπάθειες σε ποιο ερώτημα αναφέρονται, σβήσε τα τελείως περιττά μέρη και πες στον επιτηρητή ότι τελειώνεις στο τέλος του τετραδίου. Εκεί να υπογράψει. Ο βαθμολογητής θα βρει κάθε σου σωστή προσπάθεια και θα την αξιολογήσει.

4. Κάθε είκοσι λεπτά και όπου δίνεται ευκαιρία, να σηκώνεις το κεφάλι από το τετράδιο, να ξεκουράζεις λίγο τα μάτια σου, να πίνεις λίγο νερό, να πας στην τουαλέτα, αν χρειαστεί ή να πάρεις ένα παυσίπονο, αν αισθανθείς πονοκέφαλο.

5. Την προηγούμενη των εξετάσεων να έχεις κοιμηθεί σχετικά νωρίς. Να πάρεις καλό πρωινό και να βάλεις τα σωστά ρούχα. Να έχεις μαζί σου ένα μπουκάλι νερό και ένα ήπιο επιτρεπτό παυσίπονο.

6. Πάρε μαζί σου δύο στυλό ίδιου χρώματος, ένα καλό μολύβι και έναν χάρακα αλλά και διαβήτη για τα σχήματα.

7. Το κινητό ίσως δεν είναι απαραίτητο. Αν ξεχάσεις να το παραδώσεις και χτυπήσει την ώρα της εξέτασης, το γραπτό σου μηδενίζεται. Κανένα ηλεκτρονικό εξάρτημα να μην έχεις πάνω σου.

8. Στο χρόνο αναμονής για τα θέματα, μέσα ή έξω από την τάξη , και μέχρι να πάρεις τη φωτοτυπία με τις ερωτήσεις , να είσαι ήρεμος. Μην ανοίγεις το βιβλίο ούτε να ακούς τους άλλους να κάνουν προφητείες τι θα πέσει και αγχωθείς. Μην ακούς τίποτα σχετικά με τις εξετάσεις και πιάσε κουβέντα με φίλους σου για άλλα ζητήματα, ευχάριστα και αισιόδοξα. Όμως , *…να κρατάς την απόσταση !*

9. Την ώρα της εξέτασης να γράψεις τα στοιχεία σου σωστά, χωρίς λάθη. Να ακούς τις οδηγίες των επιτηρητών. Αν έρθει διόρθωση, να την περάσεις πάνω στα θέματά σου, ώστε να μην την ξεχάσεις.

10. Αν την ώρα που γράφεις αισθανθείς ότι κάτι σε ενοχλεί, ο ανεμιστήρας ή το ανοικτό παράθυρο ή κάποιος θόρυβος, να το πεις με ευγένεια στον επιτηρητή και αυτός θα το τακτοποιήσει .

11. Μπορεί σε κάποιο μάθημα να μην τα πας τόσο καλά όσο θα ήθελες ή όσο θα περίμενες. Δεν πειράζει, μην το σκέφτεσαι καθόλου. Επικεντρώσου με πείσμα στο επόμενο μάθημα και μην κοιτάζεις πίσω. Μόνο αν τελειώσει και το τελευταίο μάθημα κερδίζεται ο πόλεμος !

Ειδικές παρατηρήσεις στα Μαθηματικά

Σημειώσεις ενός Υποψηφίου.

Τι θα συναντήσω στα μαθηματικά !

Παρακάτω υπάρχουν τα πιο βασικά είδη ασκήσεων που πρέπει να γνωρίζω, αλλά και ειδικές παρατηρήσεις. Τις συγκέντρωσα στη διάρκεια της χρονιάς, για να τις μελετήσω στην επανάληψη και κυρίως τις τελευταίες μέρες. Σε κάθε μου απορία πρέπει να ανατρέχω στο τετράδιο, στο βοήθημα ή στον καθηγητή μου. Είναι αδύνατο να περιγράψω ή να συγκεντρώσω εδώ τα τόσα πολλά και σημαντικά σημεία που έχω μάθει στο μάθημα μέσα σε μια ολόκληρη χρονιά, αλλά αυτά είναι, ανάμεσα στα άλλα, μερικά πράγματα που σίγουρα μπορώ να κάνω στις εξετάσεις ή που πρέπει να προσέξω λίγο πιο πολύ. Να λοιπόν τι ξέρω και τι μπορώ να κάνω με σιγουριά. Ελπίζω εσείς να ξέρετε πολύ περισσότερα :

1. Να ορίζω τη σύνθεση , το πηλίκο , το γινόμενο δύο συναρτήσεων καθώς και την αντίστροφη μιας συνάρτησης.
2. Να εξετάζω αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες.
3. Να γράφω μια συνάρτηση ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων. Αυτό είναι λίγο δύσκολο, αλλά έχω στο τετράδιο των έξυπνων ερωτημάτων παράδειγμα και θα το μελετήσω και δυο μέρες πριν τις πανελλαδικές.
4. Να βρίσκω τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων και τη σχετική τους θέση.
5. Να βρω το πρόσημο μιας συνάρτησης. Πέραν των γνωστών μεθόδων (με πίνακα) από προηγούμενες τάξεις , το πρόσημο το βρίσκω εύκολα αν γνωρίζω τη μονοτονία και τη ρίζα της συνάρτησης σε ένα διάστημα. Τη ρίζα πολλές φορές την εντοπίζω με παρατήρηση.
6. Να υπολογίζω όρια της μορφής $\frac{0}{0}$ ή $\frac{k \neq 0}{0}$ ή $\infty - \infty$ κλπ (Να ξέρω όλες τις κατηγορίες και ειδικά την ***μηδενική (επί) φραγμένη*** ή **την άπειρο +(-) φραγμένη** , όπου εφαρμόζω κριτήριο παρεμβολής)
7. Να βρω παραμέτρους ώστε ένα όριο να είναι πραγματικός αριθμός ή να έχει μια δεδομένη τιμή. Αν το x τείνει σε αριθμό, λύνω ως προς τον αριθμητή. Αν όμως τείνει σε άπειρο, τότε παίρνω χωριστά τις περιπτώσεις που μηδενίζονται οι φαινόμενοι ως μεγιστοβάθμιοι όροι.
8. Να χρησιμοποιώ ένα όριο για να βρω ένα άλλο (η συνάρτηση κρύβεται, οπότε θέτω…).

9. Να βρω την τιμή μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα σημείο , βρίσκοντας το όριό της ή το αντίστροφο. Μερικές φορές διαιρώ μια ανισότητα με θετικό ή αρνητικό παράγοντα, παίρνω όρια και βρίσκω δύο σχέσεις $f(\alpha)\geq\beta, f(\alpha)\leq\beta$ και έτσι $f(\alpha)=\beta$

10. Να χρησιμοποιώ τον ορισμό της συνέχειας και της παραγώγου για να υπολογίσω ένα όριο (Συνήθως θέτουμε. Το περιμένω ως θέμα και να το προσέξω).

11. Να εφαρμόζω υπαρξιακό θεώρημα (Bolzano, Rolle, ΘΜΤ,ΘΕΤ, ΘΜΕΤ) για την απόδειξη ύπαρξης αριθμού ή λύσης μιας εξίσωσης(Να ξέρω όλες τις περιπτώσεις).

12. Να λύνω άσκηση με εφαπτομένες. Θυμάμαι ότι πρέπει να χρησιμοποιήσω την τετμημένη του σημείου επαφής, είτε την ξέρω είτε όχι, τη ζητάνε ή δεν την ζητάνε !

13. Να γράφω, αν χρειαστεί, τις δύο συνθήκες για να έχω κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο ή μια ευθεία να εφάπτεται σε γραφική παράσταση γνωστής συνάρτησης. Για παράδειγμα για να εφάπτεται η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $M\left(x_0, f(x_0)\right)$,πρέπει και αρκεί να ισχύουν οι σχέσεις :

$$f'(x_0)=\alpha \text{ και } f(x_0)=\alpha x_0+\beta$$

14. Να παραγωγίζω μία ή δύο φορές συνάρτηση, να βρω τις ρίζες της παραγώγου και το πρόσημό της. Είναι ερώτημα που θα το έχω με απόλυτη βεβαιότητα. Ο μεγάλος κίνδυνος είναι να κάνω επιπόλαιο λάθος στις πράξεις. Στη δεύτερη παράγωγο συνάρτησης πηλίκο, πριν κάνω πράξεις, να βγάλω κοινό παράγοντα τον παρονομαστή. Θα γλυτώσω πολλές πράξεις.

15. Να βρίσκω μονοτονία , ακρότατα, σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\beta$. Αν δεν είμαι βέβαιος πώς θα λύσω τέτοιο ερώτημα, μάλλον δεν πάω στις εξετάσεις !!!

16. Να αναγνωρίζω, να καταλάβω δηλαδή , ότι πρέπει να εφαρμόσω το θεώρημα Fermat σε άσκηση εύρεσης παραμέτρου.

17. Να λύνω προβλήματα στο ρυθμό μεταβολής και στα ακρότατα. Είναι ερωτήματα που έχουν συγκεκριμένη τεχνική .Αν ξέρω τρία από το κάθε είδος, θα λύσω και οποιοδήποτε άλλο.

18. Να λύνω εξίσωση ή ανίσωση. Δεν ξεχνάω ότι πιθανόν πρέπει να τη φέρω στη μορφή $f(g(x))=f(h(x))$ με γνησίως μονότονη συνάρτηση f. Να προσέξω αν έχω εξίσωση της μορφής $f(g(x))=\beta$ και το β είναι το ακρότατο της f που παρουσιάζεται μόνο στη θέση α. Η εξίσωση τότε γίνεται : $f(g(x))=\beta \Leftrightarrow g(x)=\alpha$.Να θυμηθώ επίσης ότι η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ γίνεται ισοδύναμα $f(x)=x$.Λύνω εκείνη από τις δύο που είναι η ευκολότερη.

19. Να αποδεικνύω ανισότητα. Θα χρησιμοποιήσω ή το ακρότατο της συνάρτησης ή θα κάνω μελέτη τη συνάρτηση της διαφοράς ή θα κάνω ΘΜΤ σε κατάλληλη συνάρτηση σε κατάλληλο διάστημα, που θα καταλάβω από τη μορφή της ανίσωσης. Αν δω διπλή ανισότητα μάλλον είναι για ΘΜΤ, ειδικά αν την γράψω στη μορφή $A < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < B$.

20. Να βρίσκω τον τύπο συνεχούς ή παραγωγίσιμης συνάρτησης που έχει κάποια ιδιότητα. Να θυμηθώ ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα και δεν μηδενίζεται, τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο σε αυτό το διάστημα. Αν μηδενίζεται σε ένα σημείο, περιμένω τέσσερις συναρτήσεις.

21. Να χρησιμοποιώ **βοηθητική συνάρτηση**. Θα το κάνω σίγουρα για εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano ή Rolle, αφού φέρω όλους τους όρους στο 1^o μέλος (και διώξω ίσως ανεπιθύμητους παρανομαστές). Θα χρησιμοποιήσω βοηθητική συνάρτηση επίσης , αν δεν μπορώ να βρω τις ρίζες της παραγώγου f' και έχω κλάσμα(αλλιώς προχωράω στην f'').Αν πάρω πχ βοηθητική τον αριθμητή $g(x)$ της f', τότε μελετάω την g και βρίσκω το πρόσημό της. Να κάνω ξανά ένα παράδειγμα τρεις μέρες πριν πάω στις εξετάσεις.

22. Να εξάγω συμπεράσματα από διάγραμμα και να βρω μονοτονία, ρίζες, πλήθος ριζών, σύνολο τιμών, όρια κλπ.Το περιμένω θέμα και για αυτό θα λύσω όσα ερωτήματα έχουν πέσει μέχρι τώρα στις εξετάσεις αλλά και τα άλλα από το βοήθημά μου.

23. Στη θεωρία ξέρω καλά όλες τις διατυπώσεις και τις περιπτώσεις που θέλουν αντιπαραδείγματα.

24. Αν η συνάρτηση έχει παράμετρο και τα ακρότατα εκφράζονται συναρτήσει της παραμέτρου, μπορεί να ζητηθούν οι τιμές της παραμέτρου , ώστε το ακρότατο να είναι μέγιστο ή ελάχιστο . Αρκεί να μελετήσω τη συνάρτηση του ακροτάτου με μεταβλητή την παράμετρο !

25. Αν χρειαστώ το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, είναι προτιμότερο τις περισσότερες φορές να το βρω από τη μονοτονία, τη συνέχεια και τα όρια, παρά απαιτώντας η εξίσωση $f(x)=y$ να έχει λύση ως προς x στο πεδίο ορισμού A της f.

26. Συνήθως το ΘΜΤ το εφαρμόζω στη δοσμένη συνάρτηση f που ξέρω από τα δεδομένα του προβλήματος (μένει σε μένα να βρω το διάστημα!), ενώ το θεώρημα Bolzano και Rolle θέλουν συχνά βοηθητική συνάρτηση, που τη βρίσκω με τον γνωστό τρόπο(Να τον θυμηθώ από τις εφαρμογές που έχω στο τετράδιό μου ή στο βοήθημα).

27. Όλες οι ασκήσεις με εφαπτομένες, για να λυθούν σωστά, πρέπει να εμπλέξουν το σημείο επαφής, είτε είναι γνωστό, είτε άγνωστο, είτε μας το ζητάνε είτε όχι ! Να θυμάσαι ότι για να έχουν δύο συναρτήσεις f,g κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0 , πρέπει και αρκεί να ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$f(x_0)=g(x_0) \text{ και } f'(x_0)=g'(x_0)$$

Αν αντί για την g έχω την ευθεία (ε) με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$, τότε για να εφάπτεται η ευθεία (ε) με την γραφική παράσταση της f, πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις :

$$f(x_0)=\alpha x_0+\beta \quad \text{και} \quad f'(x_0)=\alpha$$

Στην ουσία οι τελευταίες σχέσεις προκύπτουν από τις πρώτες και αυτό μου το έχει εξηγήσει ο καθηγητής μου πολλές φορές.

28. Είναι φανερό ότι άσκηση με διερεύνηση ορίου δεν πρέπει να με δυσκολέψει. Έχω λύσει αρκετές τέτοιες . Ακόμα και στο σχολικό βιβλίο μια ματιά θα βοηθήσει. Αν πχ $x\to x_0$, τότε θέτω τη συνάρτηση του ορίου $g(x)$, λύνω ως προς τον αριθμητή και παίρνω(ποτέ με ισοδύναμο) όρια και στα δύο μέλη. Αν όμως $x\to\pm\infty$, τότε κάνω τη διερεύνηση στους συντελεστές των *φαινομενικά* μεγιστοβάθμιων όρων του κλάσματος.

29. Αν σε μια συνάρτηση βρω ότι έχει παράγωγο ίση με μηδέν, δεν πρέπει να βιαστώ να πω ότι είναι σταθερή. Αν το πεδίο ορισμού δεν είναι διάστημα, τότε θα είναι σταθερή στο κάθε διάστημα (βάζω αρχικά διαφορετικές σταθερές για το κάθε διάστημα και μετά τις υπολογίζω).

30. Αν μου ζητήσουν να βρω τη μονοτονία της f', θα βρω την f'' , το πρόσημό της και θα κατασκευάσω πίνακα προσήμου της f'' και μονοτονίας της f'. Προσέχω στον πίνακα να βάλω με διπλή γραμμή και τα ανοικτά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της f . Το ίδιο θα κάνω αν μου ζητήσουν να βρω τα διαστήματα, στα οποία ο ρυθμός μεταβολής της f αυξάνει ή μειώνεται ή ακόμα το σημείο της C_f με την μεγαλύτερη ή τη μικρότερη κλίση .

Η πιο δύσκολη περίπτωση είναι να μου ζητήσουν να αποδείξω ότι δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης με παράλληλες εφαπτομένες. Τι θα κάνω ; Θα βρω την f'' και θα αποδείξω ότι αυτή διατηρεί πρόσημο στο εν λόγω διάστημα. Έτσι η f' είναι γνησίως μονότονη, και συνεπώς 1-1. Αλλιώς, αν δεν έχω διάστημα, πρέπει να αποδείξω ότι η f' είναι 1-1. Επομένως, σε κάθε περίπτωση , δεν θα υπάρχουν τέτοια σημεία.

31. Αν μου δοθεί κάποιο όριο και ζητηθούν άλλα, τότε θα θέσω τη συνάρτηση του ορίου g(x) και θα πάρω από αυτήν όποιο μέρος χρειάζομαι , θα το αντικαταστήσω και θα βρω έτσι τα ζητούμενα όρια. Δεν ξεχνάω ποτέ τον ορισμό της συνεχούς και παραγωγίσιμης συνάρτησης, αφού από αυτά βρίσκω χρήσιμα όρια ή τιμές. Αυτή η εναλλακτική μορφή με το $h\to 0$ είναι πολύ ιδιόμορφη και την προσέχω. Για παράδειγμα, η f είναι συνεχής στο x_0 , αν και μόνο αν

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$$

32. Να ξέρω ένα καλό παράδειγμα που να δείχνει πώς μια σύνθετη συνάρτηση τη γράφουμε ως σύνθεση άλλων συναρτήσεων. Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση και αυτό μπορεί να είναι μια καλή αιτιολόγηση σε κάποιο ερώτημα που αφορά στη συνέχεια.

33. Όταν βρίσκω όριο και κάνω αλλαγή μεταβλητής(πχ όταν θέτω), τότε να προσέχω πχ το εξής: Αν $\frac{1}{x}=u$ και $x\to+\infty$, τότε $u\to 0^+$, ενώ αν $x\to-\infty$, τότε $u\to 0^-$.Με άλλα λόγια το νέο όριο είναι πλευρικό και αυτό μπορεί να βοηθήσει σημαντικά.

Αντί του x μπορεί να είναι μια συνάρτηση με άπειρο όριο.

34. Ενώ μπορώ να παραγωγίσω μια ισότητα με (παραγωγίσιμες) συναρτήσεις , δεν παραγωγίζω ποτέ ανισότητα. Επίσης, μπορώ να αντιπαραγωγίσω μια ισότητα(και δεν ξεχνώ να βάλω στο 2^o μέλος τη σταθερά : +c) , δεν μπορώ όμως να αντιπαραγωγίσω ανισότητα. Σε ανισότητα με παραγώγους φέρνω όλους τους όρους στο α΄ μέλος , θεωρώ την συνάρτηση που έχει παράγωγο το 1^o μέλος , βρίσκω τη μονοτονία της(από την ανισότητα που έχω) και εφαρμόζω σε αυτή τη συνάρτηση τον ορισμό της μονοτονίας.

35. Να θυμάμαι ποιες βοηθητικές προτάσεις έχω ως θεωρία που δεν τις έχει το σχολικό, αλλά οι οδηγίες για το μάθημα. Πχ : $e^x\ge x+1$ με την ισότητα μόνο για $x=0$ κλπ. Επίσης ξέρω τις ανισότητες $\ln x\le x-1$ με ισότητα για $x=1$ και την $|\eta\mu x|\le|x|$ με ισότητα μόνο για $x=0$.

36. Αν για μια συνάρτηση μου δοθεί ο περιορισμός $f(x)\ne 0$ σε ένα διάστημα , τότε πιθανόν να χρειαστεί να πω ότι διατηρεί πρόσημο (αν επιπλέον είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό) ή να διαιρέσω κάποια ισότητα με $f(x)\ne 0$ κλπ. Ο περιορισμός $f(x)>0$ μπορεί να με βοηθήσει να πάρω λογάριθμο($\ln f(x)$) ή να δημιουργήσω το κλάσμα $\frac{f'(x)}{f(x)}$ και να γράψω $\frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln|f(x)|)'=(\ln f(x))'$.Αν μου δοθεί ότι $f'(x)\ne 0$ σε ένα διάστημα και η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η συνάρτηση αυτή έχει αντίστροφη (το αποδεικνύω με άτοπο : αν όχι, τότε υπάρχουν $x_1<x_2$ με $f(x_1)=f(x_2)$. Εφαρμόζω το θεώρημα Rolle και καταλήγω σε άτοπο, αφού $f'(x)\ne 0$).

37. Να διαβάζω τις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις που κάποιες παραστάσεις είναι οι παράγωγοι σύνθετων συναρτήσεων ή παράγωγος γινομένου ή πηλίκου. Πχ είναι

$$f(x)f'(x)=\left(\frac{f^2(x)}{2}\right)' \quad \frac{f'(x)}{f(x)}=(\ln|f(x)|)',\ \frac{f'(x)}{f^2(x)}=\left(-\frac{1}{f(x)}\right)',\ e^{f(x)}f'(x)=(e^{f(x)})' \ \text{κλπ}$$

38. Αν έχω όριο πηλίκου και παρουσιάζονται δύο ή περισσότεροι απειριζόμενοι όροι(με ή χωρίς απροσδιοριστία), βγάζουμε σε κάθε όρο του κλάσματος μπροστά τον πιο δυνατό απειριζόμενο όρο, ώστε αυτοί οι όροι που μείνουν ή δημιουργούνται μέσα στην παρένθεση να έχουν όριο μηδέν. Ανάλογα εργαζόμαστε συχνά και όταν δεν έχουμε πηλίκο αλλά εμφανίζεται απροσδιοριστία ή τριγωνομετρικός όρος. Επειδή θα έχω μορφή $\frac{\infty}{\infty}$ σε πολλά κλάσματα, δεν παραλείπω να αξιοποιήσω τον κανόνα DLH όπου εφαρμόζεται.

39. Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f , ορισμένη σε ανοικτό διάστημα Δ, έχει σύνολο τιμών της μορφής $[k,+\infty)$, τότε αυτό δηλώνει ότι η συνάρτηση έχει ελάχιστο (το k) και έτσι θα συμπεράνω από το θεώρημα Fermat ότι υπάρχει x_0 στο διάστημα Δ, ώστε $f'(x_0)=0$. Η συνάρτηση f έχει λοιπόν κρίσιμο σημείο.

Αν η παράγωγος τώρα είναι γνησίως μονότονη στο Δ , τότε το x_0 (που είναι ρίζα της παραγώγου)είναι μοναδικό και επιπλέον θα είναι $f(x_0)=k$.Μπορώ τώρα, αφού η παράγωγος είναι γνησίως μονότονη, να βρω και τη μονοτονία της f. Αριστερά από το x_0 θα είναι γνησίως φθίνουσα και δεξιά γνησίως αύξουσα. Μα θα φτιάξω έναν πίνακα και όλα αυτά θα είναι προφανή ! Επιπλέον η εξίσωση $f(x)=k$ θα έχει στο Δ μοναδική ρίζα την x_0. Σε ανάλογα συμπεράσματα για την ύπαρξη κρίσιμων σημείων, καταλήγω αν έχω κλειστό διάστημα και τα ολικά ακρότατα δεν παρουσιάζονται στα άκρα.

Να τονίσω όμως ότι γενικά δεξιά –αριστερά από μια θέση ακροτάτου δεν είναι απαραίτητο να αλλάζει η μονοτονία. Είναι εκείνο το περίεργο σχήμα που μας έδειξε ο καθηγητής μας.

40.Είναι ύπουλο, αλλά το έχω καταλάβει. Κάθε συνεχής συνάρτηση σε κλειστό διάστημα Δ έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Για αυτό όταν μου ζητάνε, ακόμα και σε πρόβλημα μέγιστη ή ελάχιστη τιμή, δεν πρέπει να παραλείψω να εξετάσω και τις τιμές στα άκρα, αν το διάστημα είναι κλειστό.

Έστω τώρα ότι η συνάρτηση παραγωγίζεται στο εσωτερικό του Δ. Αν ένα από τα ολικά ακρότατα δεν παρουσιάζεται σε άκρο του διαστήματος Δ ,τότε από το θεώρημα Fermat η παράγωγος μηδενίζεται σε αυτό το σημείο. Επομένως η συνάρτηση μπορεί να έχει και άλλο τοπικό ακρότατο, σε κάποιο άκρο του διαστήματος Δ ***ίσως***. Αυτό όμως θα το δω από τον πίνακα μονοτονίας .

41.Αν θέλω να βρω το πλήθος των ριζών μιας εξίσωσης της μορφής $f(x)=0$, τότε - με μελέτη – θα βρω τα διαστήματα μονοτονίας της f , τις εικόνες τους μέσω της f και θα εξετάσω σε πόσες από αυτές τις εικόνες ανήκει το 0(ή το β, αν έχω εξίσωση της μορφής $f(x)=\beta$).Προσέχω όμως να μην μετρήσω κάποια ρίζα δύο φορές κάτι που συμβαίνει ίσως μόνο αν κάποιο άκρο μιας εικόνας $f(\Delta)$ είναι το 0.Αν θέλω να βρω πόσα τοπικά ακρότατα έχει η f κάνω το ίδιο με το παραπάνω, αλλά για την f',βρίσκοντας δηλαδή το πρόσημο της f''. Στην τελευταία γραμμή του πίνακα μπορώ να έχω την f'. Προφανώς η f' θα αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν των ριζών της (ως γνησίως μονότονη στο κάθε διάστημα) και έτσι στις ρίζες της f' θα έχω τοπικά ακρότατα για την f.

42. Αν για μια συνάρτηση ξέρω τη μονοτονία σε ένα διάστημα και τη ρίζα της, τότε μπορώ να βρω το πρόσημό της . Πρόκειται για σπουδαία παρατήρηση με πολλές εφαρμογές.

43. Η μονοτονία μιας συνάρτησης είναι μεγάλη πληροφορία. Με βάση λοιπόν τη μονοτονία μπορώ να λύσω εξισώσεις ή ανισώσεις (αρκεί τις φέρω στη μορφή $f(g(x)) = f(h(x))$ ή $f(g(x)) < f(h(x))$) αλλά και να εφαρμόσω τον ορισμό της μονοτονίας για να αποδείξω ανισότητες. Προσέχω πιο πολύ όταν η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα, μια και η φορά αλλάζει στην εφαρμογή του ορισμού της μονοτονίας ή στο αντίστροφο.

44. Θυμάμαι πολύ καλά ότι ανισότητες αποδεικνύω ή με τον ορισμό της μονοτονίας ξεκινώντας από γνωστή ανισότητα ή με μελέτη και εύρεση του ολικού ακροτάτου μιας κατάλληλης συνάρτησης ή με ΘΜΤ, ειδικά αν η ανισότητα είναι διπλή ή συνθετικά(πιο δύσκολη περίπτωση). Μερικές φορές, αν η ανισότητα έχει δυνάμεις και γινόμενα , μετασχηματίζεται σε σχέση της μορφής $f(x) \le f(\alpha)$ ή $f(x) \ge f(\alpha)$ και έτσι μελετάω την f ως προς τα ολικά ακρότατα.

45. Καλά, αν στα δεδομένα έχω ανισότητα και ζητάω ισότητα, τότε το Fermat είναι το θεώρημα που με τίποτα δεν θα ξεχάσω. Για παράδειγμα, αν για την f ξέρω ότι (α) είναι γνησίως φθίνουσα και (β) $f(a^x) \le f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (όπου $\alpha > 0$), τότε μπορώ να αποδείξω ότι $a = e$. Προφανώς θα πάρω τη συνάρτηση $g(x) = a^x - x - 1$ και με βάση το θεώρημα του Fermat(η g πληροί τις προϋποθέσεις στο 0) θα πάρω ότι $g'(0) = 0$ κλπ. Δεν ξεχνάω ότι η θέση ακροτάτου πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο διαστήματος και όχι άκρο ή κάτι άλλο.

46. Δεν ξεχνάω ότι σε ασκήσεις εύρεσης παραμέτρων , ειδικά σε ακρότατα , χρειάζεται επαλήθευση , διότι το Fermat –συνήθως αυτό χρησιμοποιούμε- εξασφαλίζει αναγκαία συνθήκη, όχι όμως και ικανή. Το ίδιο χρειάζεται μερικές φορές και σε παραμετρικά όρια , όταν θέλουμε αυτά να είναι πραγματικοί αριθμοί ή να έχουν μια συγκεκριμένη τιμή.Α! Και σε ασκήσεις που μου ζητάνε παράμετρο για να έχω δοσμένο σημείο καμπής, πάλι πρέπει να κάνω επαλήθευση, διότι το αντίστροφο του σχετικού θεωρήματος δεν ισχύει.

47. Οι ασκήσεις στην ανάλυση γενικά χωρίζονται σε μεγάλες κατηγορίες με παρόμοιο περίπου τρόπο αντιμετώπισης :

(α) Υπαρξιακά θέματα **(β)** Εξισώσεις –ανισώσεις **(γ)** Ανισότητες **(δ)** Προβλήματα σε ρυθμό μεταβολής ή σε ακρότατα **(δ)** Διαγράμματα **(ε)** Πλήθος ριζών , πλήθος ακροτάτων **(στ)** Εφαπτομένες σε σημείο, από σημείο, σε κοινό σημείο , σε μη κοινά σημεία. **(ζ)** Όρια.

(η) Θέματα εύρεσης στο γενικό μέρος, στη συνέχεια και στην παράγωγο.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση που θα βλέπω μια άσκηση, θα προσπαθώ να την εντάξω, αν χρειαστεί , σε κάποια από αυτές τις ομάδες, ώστε να κάνω πρώτα όλες τις βασικές ενέργειες που κάνουμε στις ασκήσεις της ίδιας ομάδας και μόνο μετά θα προχωρήσω σε τεχνάσματα ή στην ανάκληση άλλων μεθόδων από τη λύση παρόμοιων ασκήσεων.

48. Αν μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ έχει ελάχιστο(ή μέγιστο) στο $x_0 \in \Delta$ και ένα από τα όρια της f είναι άπειρο, τότε δεν χρειάζεται να βρω και το όριο στο άλλο, αφού το σύνολο τιμών θα είναι το $f(\Delta)=[f(x_0),+\infty)$ (αντίστοιχα το $f(\Delta)=(-\infty,f(x_0)]$.

49. Ξέρω επίσης ότι εξισώσεις της μορφής $f^{-1}(x)=x$ είναι ισοδύναμες με την εξίσωση $f(x)=x$. Όμως σε ανισώσεις τέτοιας μορφής χρειάζεται ειδική διερεύνηση και δεν ισχύει το ίδιο. Δεν συνθέτουμε δηλαδή στα δύο μέλη την f, αλλά θέλει και άλλες παρατηρήσεις. Το έχω κάνει στο μάθημα σε μια άσκηση. Θυμάμαι ότι όλοι μας το είχαμε λύσει λάθος μέχρι να μας το πει ο καθηγητής μας.

50. Μια ιδιαίτερη μορφή εξισώσεων της μορφής $f(x)=g(x)$ λύνονται ως εξής : Βρίσκω πχ ότι $f(x)\le k$ με την ισότητα να ισχύει **μόνο** για $x=\alpha$ και $g(x)\ge k$ με την ισότητα να ισχύει (τουλάχιστον) για $x=\alpha$.Τότε η εξίσωση αυτή έχει μοναδική ρίζα την $x=\alpha$, αφού για όλες τις άλλες τιμές του χ θα ισχύει ότι $f(x)<g(x)$.Φυσικά , το ίδιο θα ισχύει αν αποδείξω ότι $f(x)\ge k\ge g(x)$ και το ίσον ισχύει συγχρόνως μόνο για μία τιμή του x , την $x=\alpha$.

51. (α) Η εύρεση των ασύμπτωτων είναι υπόθεση εύρεσης ορίων. Το πεδίο ορισμού συχνά μου δείχνει τις πιθανές κατακόρυφες ασύμπτωτες. Είναι στα ανοικτά άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού και στα σημεία ασυνέχειας. Αν το πεδίο ορισμού έχει είναι ένωση διαστημάτων με πραγματικά άκρα, δεν έχει νόημα να ψάξω για ασύμπτωτες στα άπειρα, δηλαδή για οριζόντιες ή για πλάγια ασύμπτωτη.

(β) Αν μου ζητήσουν τον ορισμό της ασύμπτωτης της μορφής $y=\alpha x+\beta$ στο $+\infty$, δεν γράφω τους τύπους που βρίσκουμε τα α και β ,αλλά τον ορισμό με το όριο.(…).

(γ) Όταν ξέρω τις ασύμπτωτες , μπορώ να τις μεταφράσω σε όρια. Με άλλα λόγια , από την γνώση των ασύμπτωτων μπορώ να υπολογίζω μερικά χρήσιμα όρια, τόσο σε σημείο όσο και στα άπειρα, ανάλογα με την ασύμπτωτη.

52. Όταν εφαρμόζω τον κανόνα του DLH προσέχω να έχω τις προϋποθέσεις. Σε θεωρητικές ασκήσεις δεν πρέπει να υπερβώ τις υποθέσεις μου, γιατί μετά θα οδηγηθώ σε αδιέξοδο. Έχω σχετικό παράδειγμα στο τετράδιό μου.

53. Μερικές ακόμα **προτάσεις** που δεν έχει το βιβλίο και μπορώ να χρησιμοποιήσω για τη λύση των ασκήσεων είναι οι παρακάτω. Είναι χρήσιμες και μπορεί να τις ρωτήσουν και σε Σωστό-Λάθος (Σ-Λ).

1. i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$$

ii) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2 .$$

2. Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και **β)** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

ii) Αν ισχύουν:

α) $f(x) \le g(x)$ κοντά στο x_0 και **β)** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x \ge x + 1$ και το ίσον $(=)$ ισχύει μόνο για $x = 0$.

Πρόκειται για πολύ χρήσιμη πρόταση που βρίσκει εφαρμογή σε μεγάλο εύρος ασκήσεων, όχι μόνο ανισοτήτων αλλά και εξισώσεων.

4. Την ανισότητα $\ln x \le x - 1$ την έχει το σχολικό, τη βάζω όμως και αυτή εδώ για να είναι όλες μαζί.

5. Το γινόμενο δύο συναρτήσεων μπορεί να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με τη συνάρτηση μηδέν.

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις $f(x) = x + |x|$ και $g(x) = x - |x|$ έχουν γινόμενο μηδέν, αλλά καμία από τις δύο δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Συνιστάται να γίνει η γραφική τους παράσταση.

6. Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα (σ_1, σ_2) έχει την ιδιότητα

$$\lim_{x \to \sigma_1} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \to \sigma_2} f(x) = +\infty \text{ (ή } \lim_{x \to \sigma_1} f(x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \to \sigma_2} f(x) = -\infty \text{)},$$

τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$.

7. Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

- Αν $f(x) \ge g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε θα ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \ge \int_\alpha^\beta g(x)dx .$$

- Αν, <u>επιπλέον</u>, οι συναρτήσεις f και g δεν είναι ίσες στο $[\alpha, \beta]$ (δηλαδή, αν υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$, με $f(\xi) \ne g(\xi)$), τότε θα ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx .$$

54. Αν σε ένα διάστημα Δ ισχύει $f'(x)=f(x)$, τότε $f(x)=ce^x$.Αυτή τη σχέση μπορώ να τη χρησιμοποιήσω αν θέλω να βρω τον τύπο κάποιας συνάρτησης. Για παράδειγμα, αν $2xf(x)=(x^2+1)(f(x)-f'(x))$ και $f(0)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε για βρω τον τύπο της f θα γράψω:

$$2xf(x)=(x^2+1)(f(x)-f'(x))\Leftrightarrow(x^2+1)'f(x)+(x^2+1)f'(x)=(x^2+1)f(x)\Leftrightarrow$$
$$((x^2+1)f(x))'=(x^2+1)f(x)\Leftrightarrow(x^2+1)f(x)=ce^x\Leftrightarrow f(x)=\frac{ce^x}{x^2+1}$$

Αλλά $f(0)=1\Leftrightarrow c=1$ και έτσι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$.Βρείτε τώρα μόνοι σας τη μονοτονία, αν θέλετε.

55. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε διατηρεί πρόσημο στο Δ. Την πρόταση αυτή χρησιμοποιώ για να βρω τον τύπο συνεχούς συνάρτησης , ειδικά αν δημιουργήσω τετράγωνο ή απόλυτο τιμή. Εδώ θυμάμαι πχ ότι αν για τη συνάρτηση f έχω $f^2(x)=\ln^2 x$ και η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, τότε θα βρω τέσσερις συναρτήσεις, αφού $f(x)=0\Leftrightarrow x=1$, και όχι μόνο δύο. Ένας πίνακας με τις τέσσερις περιπτώσεις μου δίνει εύκολα όλες τις συναρτήσεις(έχει μπει και θέμα στις εξετάσεις).

56. Αν θέλω να αποδείξω ανισότητα με ολοκλήρωμα, πχ ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx>M$, φέρνω στο μυαλό μου τα εξής :

(α) Είναι $\alpha\le x\le\beta$ και έτσι η μονοτονία της συνάρτησης f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, αν έχει εξασφαλιστεί , δίνει :

$$f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta) \text{ ή } f(\alpha)\ge f(x)\ge f(\beta) \quad (1)$$

ανάλογα με το είδος της μονοτονίας .

Επειδή θα είναι δεδομένη η συνέχεια της f , από τη σχέση αυτή **ολοκληρώνοντας στο** $[\alpha,\beta]$ οδηγούμαστε ίσως στην ζητούμενη ανισότητα. Επειδή η ισότητα στις σχέσεις (1) δεν ισχύει παντού, η ανισότητα που προκύπτει με την ολοκλήρωση είναι γνήσια.

(β) Μερικές φορές βρίσκουμε τα ακρότατα μ και Μ της f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και έτσι ολοκληρώνουμε τη σχέση $\mu\le f(x)\le M$ στο $[\alpha,\beta]$.

(γ) Μια πολύ χρήσιμη περίπτωση είναι όταν έχουμε κυρτή ή κοίλη συνάρτηση. Γράφω τότε την βασική ανισότητα για τη συνάρτηση και την εφαπτομένη σε ένα κατάλληλο σημείο της (πχ $f(x)\ge\alpha x+\beta$ για κυρτή συνάρτηση) και στη συνέχεια ολοκληρώνω στο $[\alpha,\beta]$. Η ανισότητα που θα προκύψει είναι γνήσια γιατί ισότητα έχουμε μόνο στην τετμημένη του σημείου επαφής.

58. Για την εύρεση ολοκληρωμάτων με αντίθετα άκρα ολοκλήρωσης $I=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$ είναι δόκιμο θα θέσουμε $x=-u$.Αυτή η αντικατάσταση είναι κυρίως χρήσιμη όταν έχουμε άρτιες ή περιττές συναρτήσεις αλλά και σε πολλά άλλες περιπτώσεις που βοηθάει η τύπος της συνάρτησης.

59. Μερικές φορές το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με την αντικατάσταση $u=\alpha+\beta-x$. Η αντικατάσταση αυτή δίνει ότι $I=\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx$.Επομένως :

$$2I=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)+f(\alpha+\beta-x))dx$$

Κάνοντας τις πράξεις το νέο ολοκλήρωμα συχνά υπολογίζεται και η εύρεση του Ι είναι άμεση.

60. Ολοκληρώματα της μορφής $I=\int_{\alpha}^{\beta} e^{\lambda x}\eta\mu x dx$ ή $I=\int_{\alpha}^{\beta} e^{\lambda x}\sigma\upsilon\nu x dx$ υπολογίζονται αν κάνουμε δύο φορές ολοκλήρωση κατά παράγοντες. Το αρχικό ολοκλήρωμα Ι εμφανίζεται ξανά, οπότε οδηγούμαστε σε μια απλή εξίσωση ως προς Ι.

61. Όσο για το **ΘΕΜΑ Α** πρέπει να ξέρω τέλεια :

(α) Τους ορισμούς.

(β) Τις διατυπώσεις όλων των θεωρημάτων και τις γεωμετρικές ερμηνείες όσων από αυτά έχουν.

(γ) Τα θεωρήματα που δεν ισχύει το αντίστροφο και το κατάλληλο αντιπαράδειγμα , υπολογιστικό ή με διάγραμμα.

(δ) Τις αποδείξεις όσων θεωρημάτων έχω κάνει στο μάθημα. Η απόδειξη του Θεωρήματος Fermat είναι η πιο δύσκολη και την χωρίζω σε τρία μέρη για να τη θυμάμαι.

(ε) Τα σχόλια και τις παρατηρήσεις του βιβλίου που έχουν θέση προτάσεων και είναι χρήσιμα για τη λύση των ασκήσεων.

(στ) Τις διατυπώσεις και τις γεωμετρικές ερμηνείες των επώνυμων θεωρημάτων. Τα θεωρήματα αυτά είναι :

- Το θεώρημα Bolzano
- Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (ΘΕΤ)
- Το θεώρημα μέγιστης ελάχιστης τιμής.
- Το θεώρημα Rolle.
- Το θεώρημα μέσης τιμής (ΘΜΤ)
- Το θεώρημα Fermat.

(ζ) Για την περίπτωση της αιτιολόγησης κάποιου ισχυρισμού ξέρω και μερικά βασικά σχήματα που περιέχει το σχολικό βιβλίο, κυρίως στην ενότητα των συνεχών συναρτήσεων. Θα τα μάθω και ελπίζω να μην χρειαστούν.

62. Έλεγε ο καθηγητής μας στο μάθημα ότι το ΘΜΤ είναι για τους μαθηματικούς ο Από Μηχανής Θεός σε ορισμένες περιπτώσεις ! Αυτό δεν το κατάλαβα και τόσο, αλλά αν όλα μου τα εργαλεία τελειώσουν θα προσπαθήσω να το εφαρμόσω και ό,τι βγει !

Εδώ πρέπει να σταματήσω όμως. Σας κούρασα. Δεν τελειώνουν όλα όσα έχω μάθει , όσα ξέρω και όσα έχω σημειώσει στο ειδικό τετράδιο που έχω για αυτή τη δουλειά ! Είμαι σίγουρος ότι και κάθε άλλος υποψήφιος, καθένας από σας , τα ξέρει όλα αυτά και θα έχει και πολλά άλλα να συμπληρώσει.

Θυμάμαι όμως και σας μεταφέρω, για να μην το ξεχάσω, τα λόγια του καθηγητή μου :
Στις εξετάσεις δεν πάμε να εφαρμόσουμε δύσκολα τεχνάσματα και σπάνιες τεχνικές, αλλά να αξιοποιήσουμε σε κάθε ερώτημα πρώτα τις βασικές και σημαντικές γνώσεις μας, κάνοντας νηφάλια ήρεμους συλλογισμούς και μετά τις υπόλοιπες ειδικές ενέργειες (όπως θέτω κλπ). Πάντα ξεκινάμε με τους πιο απλούς συλλογισμούς και συνεχίζουμε , ανάλογα με την άσκηση , σε πιο σύνθετους, σπάνια όμως σε πολύπλοκες και δαιδαλώδεις περιπέτειες.

Αυτά ! Για οτιδήποτε άλλο συναντήσω θα σκεφτώ ήρεμα, ψύχραιμα και θα εργαστώ μεθοδικά , ώστε να συλλέξω όσες πιο πολλές μονάδες μπορέσω , ακόμα κι αν δεν λύσω το ερώτημα μέχρι τέλος. << Αν κάνω τα λιγότερα επιπόλαια λάθη, τότε είμαι από τώρα φοιτητής. Αν δεν κάνω κανένα , τότε περνάω στην πρώτη μου προτίμηση >>. Αυτά λέει ο μαθηματικός μου , μάλλον για να μου δίνει κουράγιο, αλλά αυτός το πιστεύει γιατί μας το λέει συχνά με έμφαση και βεβαιότητα ! Καλό μου ακούγεται αυτό , πολύ αισιόδοξο και θα προσπαθήσω να το τηρήσω αλλά και να το αποδείξω στην πράξη, στις εξετάσεις δηλαδή.

Καλή επιτυχία !

Φίλοι μαθητές και φίλες μαθήτριες, σας εύχομαι ολόψυχα ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !!!

* Ευχαριστώ την καλή φίλη και συνάδελφο **Μυρτώ Λιάπη** για την επιμέλεια του κειμένου.